This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

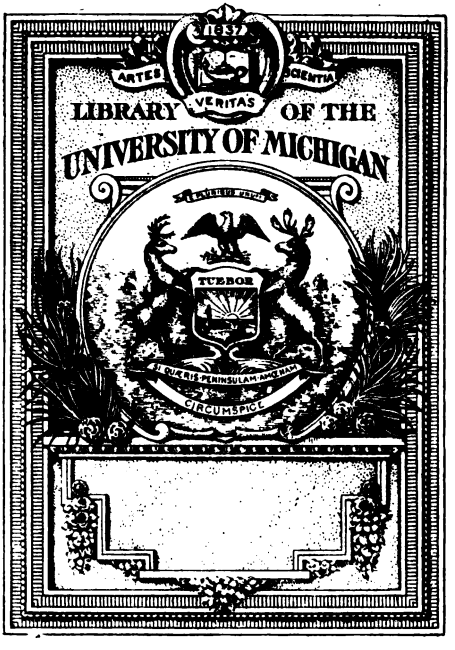
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.




THE GIFT OF
Prof. Alex. Ziwet

Alexander Ziwet
QA
84
.D7

Die

# Bewegungsgesetze für Kräfte,

welche

## der Entfernung proportional sind.

---

Eine

**mechanische Abhandlung für die Realprima**

von

Friedrich
**Dr. Dornheim.**
1 =

Minden.
Gedruckt bei J. C. C. Bruns.
1867.

Gift of
Prof. A. Ziwet
Sept, 13, 1906

1) Alle Bewegungen, welche wir beobachten, sind relative, keine absolute. Wir beurtheilen die Ortsversetzung und Geschwindigkeit eines in Bewegung begriffenen Körpers nach seiner Lagenveränderung in Beziehung auf andere Gegenstände, die wir als fest ansehen, eine Annahme, für deren Richtigkeit kein Beweis möglich ist. Bleiben wir bei den Bewegungen auf der Erde stehen, so wissen wir, daß dieselbe selbst sehr complicirte Bewegung — translatorische, drehende, mit gleichbleibender und veränderlicher Geschwindigkeit — ausführt. Es nehmen daran sämmtliche auf ihr befindliche Körper theil, in der Art, daß sie, wenn ihre Entfernung auf der Erde nicht zu groß ist, in jedem kleinen Zeitmomente parallele gleich lange gerade Linien beschreiben. Wirkt nun auf einen Körper eine Kraft besonders, die ihren Sitz auf der Erde hat, und welche durch die Bewegung derselben ungeändert ihre Lage und Größe in Bezug auf die Gegenstände auf ihr beibehält, so wird derselbe eine Bewegung ausführen in Bezug auf diese Gegenstände, als ob die Erde in Ruhe wäre, und jene Kraft alsdann auf den Körper einwirkt. Hat allgemein ein System von Punkten vermöge der Trägheit oder darauf einwirkender Kräfte eine Bewegung der Art, daß jeder Punkt in jedem Augenblicke parallele und gleich lange Gerade beschreibt, und wirkt auf einen derselben besonders eine Kraft, deren Richtung sich stets parallel bleibt, und deren Größe constant ist oder von der Lage unabänderlich mit dem Systeme verbundener Punkte oder Linien oder Flächen abhängt, so ist die Bewegung des Punktes in Bezug auf das System genau so, als ob dasselbe in Ruhe wäre, und jene Kraft oder Kräfte auf den Körper allein einwirkten. Man wird also die absolute Lage eines solchen Körpers A zur Zeit t erhalten, indem man zunächst den mit A coincidirenden Punkt des Systems in die Lage B bringt, welche er zur Zeit t annimmt und demnächst in der Richtung der Kraft von B aus den Weg B C abträgt, welchen dieselbe den Körper A beschreiben machen

31[illegible]657

würde, falls sie allein Bewegung hervorbrächte. Es würde dann der Körper A nach der Zeit t sich in C befinden müssen. Oder auch: würde A vermöge der gemeinschaftlichen Bewegung des Systems von A nach B, vermöge der besondern auf ihn einwirkenden Kraft von A nach D versetzt, so wird er in dem Parallelogramme ABCD den Punkt C erreichen. Weiß man also umgekehrt, daß der Punkt A zur Zeit t in C ankömmt, und daß seine Bewegung aus zwei Bewegungen obiger Beschaffenheit hervorgeht, deren eine nach AB, die andere nach AD gerichtet ist, so werden die Strecken AB und AD des Parallelogramms ABCD die Wege sein, welche jeder der beiden Bewegungen für sich zukommen, Aehnliches würde von den partiellen Geschwindigkeiten gelten.

**2)** Das Gesagte wollen wir zuerst auf den einfachsten Fall der Kräfte nämlich den der constanten Kräfte anwenden, und die Bewegungsgesetze für diesen Fall entwickeln. Wir nehmen an, daß der von der Kraft angegriffene Körper N, den wir uns als materiellen Punkt denken, im Zustande der Ruhe sich befinde, wenn die Kraft auf ihn zu wirken beginnt. Es kömmt nun darauf an, sowohl die Geschwindigkeit v, als den durchlaufenen Weg s, welcher geradlinig sein muß, weil die Kraft ihre Richtung nicht ändern soll, durch die Zeit t auszudrücken. Den Punkt N denken wir uns einem Systeme von Punkten, deren jeder dieselbe Masse besitzt wie N angehörend, und mit ihm mögen die Punkte A, B, C, D ꝛc. coincidiren. Die Zeit t theilen wir in n gleiche Theile und wollen zuerst v bestimmen. Wirkt auf jeden Punkt des Systems eine Kraft, welche der auf N einwirkenden gleich und gleich gerichtet ist, so werden alle Punkte A,B,C,D so lange mit dem Punkte N zusammen bleiben, als die Kräfte dauern. Es geschehe dies nun während des ersten jener n Momente, darnach aber höre die Kraft auf, welche A angreift. A wird sich von da ab nur noch vermöge der Trägheit, mit der während jenes Momentes erlangten Geschwindigkeit weiter bewegen. Dieselbe sei $\gamma$. Die übrigen Punkte B, C, D . . . N werden dann in dem nächsten Momente in Bezug auf A die Geschwindigkeit $\gamma$ erhalten, weil die Kräfte ungeändert auf sie einwirken, ihre absolute Geschwindigkeit ist deshalb gleich $2\gamma$, d. i. gleich ihrer Geschwindigkeit in Bezug auf A plus der Geschwindigkeit von A selbst. Denken wir uns ebenso nach Verlauf des dritten, vierten ꝛc. Momentes hörten die Kräfte der Reihe nach auf die Punkte B, C, D . . . N zu wirken auf, so wird jeder folgende gegen den vorhergehenden eine relative Geschwindigkeit $\gamma$ besitzen, ist N also der nte Punkt, so besitzt derselbe die absolute Geschwindigkeit $v = n\gamma$. Ist nun t' eine andere Zeit, welche in n' Momente

von der Größe $\frac{t}{n}$ zerfällt, und bezeichnet v', die in dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit, so ist $v : v' = ny : n'y = n : n' = t : t'$ bedeutet also k die in der Zeiteinheit, erlangte Geschwindigkeit, so würde man aus $t : 1 = v : k$ erhalten:

$$1) \quad v = kt.$$

Wirkte auf N die doppelte, dreifache, nfache Kraft, so wird die in der Einheit der Zeit erzeugte Geschwindigkeit das doppelte, dreifache nfache von k sein. Denken wir uns nämlich mit N in diesem Falle noch m Punkte A,B,C zusammen, und wirkte dann auf A die einfache, auf B die doppelte auf C die dreifache .. auf N die nfache Kraft nach derselben Richtung, so würde jedes folgende Theilchen in Beziehung auf das vorhergehende die Geschwindigkeit k nach der Zeiteinheit, das Theilchen N also die Geschwindigkeit nk erlangen. Die Kräfte sind somit, falls sie an denselben Massen wirken, proportional der Geschwindigkeit, welche sie in der Einheit der Zeit erzeugen. Ist die zu bewegende Masse aber das doppelte, dreifache ꝛc., so wird die in der Einheit der Zeit erzeugte Geschwindigkeit die Hälfte, der dritte Theil ꝛc. sein. Betrachten wir die Secunde als Zeiteinheit, das Pfund als Masseneinheit, den Fuß als Längeneinheit, so wollen wir in dem Folgenden diejenige Kraft als Krafteinheit betrachten, welche im Stande ist einem Pfunde in der Secunde die Geschwindigkeit von einem Fuß mitzutheilen. Die Größe der Schwerkraft, welche wir mit dem Buchstaben g bezeichnen wollen, ist alsdann 31,25, weil sie einem Pfunde in der Secunde die Geschwindigkeit 31,25 Fuß mittheilt.

Es muß nun zweitens die Länge des durchlaufenen Weges s berechnet werden. Wir theilen die Zeit t in zwei gleiche Hälften $t_1$. Die mit N coincidirenden Punkte A,B ꝛc. mögen nun während der ersten Hälfte eine gemeinschaftliche Bewegung mit N haben, die gemeinschaftlich durchlaufene Strecke heiße $x_1$. Hört nun die den Punkt A angreifende Kraft auf, so wird sich derselbe mit der Geschwindigkeit $kt_1$ weiter bewegen, so daß A in der zweiten Hälfte der Zeit den Weg $kt_1^2$ durchläuft. In dieser Zeit muß aber N die Strecke $x_1$ vorausgekommen sein, so daß der von Anfang ab von N zurückgelegte Weg $s = kt_1^2 + 2x_1$ ist. Durch ähnliche Schlüsse gelangt man zu den Gleichungen $x_1 = kt_2^2 + 2x_2$, $x_2 = kt_3^2 + 2x_3$, $x_3 = kt_4^2 + 2x_4$ ꝛc., worin $t_1 = 2t_2 = 4t_3 = 8t_4$ ꝛc., und $x_2$, $x_3$. $x_4$ die in den Zeiten $t_2$, $t_3$, $t_4$ durchlaufenen Räume von Anfang der Bewegung ab gerechnet bedeuten. Daraus

ergibt sich durch successive Substitution, indem man die Zeittheilung bis ins Unendliche fortsetzt:

$$s = kt^2 \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots\right)$$

oder:

$$2)\quad s = \tfrac{1}{2} kt^2.$$

Besitzt N schon eine bestimmte Geschwindigkeit c nach der Richtung AM, und AB die Strecke bezeichnet, welche N vermöge derselben längs AM in der Zeit t beschreiben würde, wenn keine weitere Kraft, AC die Strecke, welche N vermöge dieser Kraft durchliefe, wenn keine ursprüngliche Geschwindigkeit nach AM vorhanden wäre, so würde N nach der Zeit t in dem Punkte D des Parallelogramms ABCD angelangen, vorausgesetzt, daß die Kraft allerorts dieselbe Größe und Richtung ungeändert beibehält. Zieht man durch A die Grade AP senkrecht zu der Richtung AC der Kraft und bezeichnet den Winkel MAC mit $\alpha$, des Perpendikels von D auf AP mit y und die Projection von AB auf AP mit x, so ist $AB = ct$ und $AC = \frac{1}{2}kt^2$, und man erhält:

$$x = ct \sin \alpha$$

$$y = ct \cos \alpha + \tfrac{1}{2} kt^2,$$

wobei man die in den Winkel fallenden y als positiv ansieht. Die Elimination von t ergibt alsdann die parabolische Bahn des Punktes N. Aehnlich bestimmt man die Geschwindigkeit v zur Zeit t. Es ist nämlich die Geschwindigkeit längs AM gleich c, längs AC gleich kt, bildet man aus diesen beiden Geschwindigkeiten und Winkel $\alpha$ das Parallelogramm, so stellt die durch den Scheitel von $\alpha$ gehende Diagonale die Geschwindigkeit v vor, es ist demnach:

$$v^2 = c^2 + k^2t^2 + 2ckt \cos \alpha.$$

Wird $< \alpha = 2R$, so ist die Geschwindigkeit c der Richtung der Kraft entgegengesetzt, es wird $v = c - kt$ und $c - v = kt$; die Verminderung der Geschwindigkeit c während der Zeit t ist also genau gleich der Geschwindigkeit, welche die Kraft k nach der Zeit t erzeugen würde.

Hat man es mit veränderlichen Kräften zu thun, so lassen sich mit Hülfe der entwickelten Gleichungen Ausdrücke für die Größe derselben, so wie für die Geschwindigkeit entwickeln, welche vielfach in der Mechanik angewandt werden. Es sei nämlich k die Größe der Kraft und v die Geschwindigkeit in einem bestimmten Momente. Bezeichnet dann $\tau$ eine unendlich kleine Zeit, so dürfen wir die Kraft während derselben als constant und gleich k betrachten. Die während dieses Momentes hervorgebrachte Geschwindigkeit ist dann $k\tau$, bezeichnet also v,

die Geschwindigkeit am Ende desselben, so ist $v_1 = v + k\tau$, folglich $k = \frac{v_1 - v}{\tau}$. Man kann also den Quotienten aus dem Geschwindigkeitszuwachse durch die unendlich kleine Zeit, in welcher derselbe hervorgebracht wird, als Maaß der Kraft ansehen. Betrachtet man ferner das Mittel zwischen der zu Anfang und zu Ende dieses Momentes vorhandenen Geschwindigkeit als das Maaß der Geschwindigkeit während der Zeit $\tau$, so würde dasselbe gleich $v + \frac{1}{2}k\tau$ sein. Bezeichnet deßhalb $\xi$ den in der Zeit $\tau$ durchlaufenen Weg, so wird derselbe erzeugt durch die Geschwindigkeit v und die Kraft k, es ist deßhalb $\xi = v\tau + \frac{1}{2}k\tau^2$. Der Quotient aus $\xi$ und $\tau$ gibt also die gesuchte Geschwindigkeit.

**3)** Bei Berechnung der Centripetalkraft ist die Aufgabe das Umgekehrte der vorhergehenden, es ist die Bahn gegeben und die Richtung der Kraft, woraus die Größe der letztern bestimmt werden soll. Die Kraft ist stets normal zur Bahn zu denken, und ihre Größe muß so beschaffen sein, daß sie den bewegten Körper, welcher eine bestimmte nach der Tangente gerichtete constante oder veränderliche Geschwindigkeit besitzt, in die gegebene Bahn zurückführt. Die Masse des bewegten Körpers sei eins. Nehmen wir an, derselbe sei bis A (Fig. 1) gekommen und besitze die Geschwindigkeit v, mit welcher er sich in der unendlich kleinen Zeit $\tau$ nach dem dicht anliegenden Punkte B der Bahn bewegt. Dann ist $AB = v\tau$. Wäre nun keine nach der Richtung der Normalen AM wirkende Kraft vorhanden, so würde der Körper sich nicht von A nach B, sondern er müßte sich längs der in A gezogenen Tangente AE bewegen. Für die unendlich kleine Strecke AB können wir uns die Normalkraft als sich parallel bleibend denken. Alsdann hätten wir zur Bestimmung der Strecken, welche der Körper längs der Tangente AE vermöge der längs der Tangente wirksamen Kräfte, und längs AM vermöge der Centripetalkraft beschreibt, nur nöthig ein Rechteck zu zeichnen, von dem zwei Seiten in die Richtungen AE und AM fielen, und dessen Diagonale AB ist. Ist alsdann AD die in AM fallende Seite und bedeutet k die Größe der Centripetalkraft, so ist $AD = \frac{1}{2}k\tau^2$.

Zeichnet man nun einen Kreis, welcher AE in A berührt und außerdem durch B geht, und nennt den Radius dieses Kreises r, so leitet man leicht nach einem bekannten Satze der Kreislehre die Proportion $AD : AB = AB : 2r$ her, welche durch Einsetzung der oben gefundenen Werthe für die drei ersten Glieder ($\frac{1}{2}k\tau^2 : v\tau = v\tau : 2r$) für k den Ausdruck

$$3)\quad k = \frac{v^2}{r}$$

liefert. Ist die Bahn selbst ein Kreis, welchen der Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchläuft, so bleibt der Werth für k für alle Punkte derselben constant, und die Normalkraft ist fortwährend nach dem Mittelpunkte gerichtet. Für eine andere Curve wird jener Kreis der sogenannte Krümmungskreis. Bewegt sich ein Körper vermöge irgend einer Centralkraft auf der Peripherie dieser Curve, so muß die normale Componente in jedem Punkte der Bahn gleich der Fliehkraft sein, die tangentiale ändert die Geschwindigkeit. Ist die bewegte Masse m, so muß die rechte Seite der Gleichung 3 mit m multiplicirt werden.

**4)** Es seien nun ferner in (Fig. 2) AB und CD zwei aufeinander senkrechte Durchmesser des Kreises, dessen Radius gleich a ist, und es bewege sich ein Körper von der Masse eins längs der Peripherie desselben mit der constanten Geschwindigkeit c in der Richtung von A nach E. Stellt dann der Radius ME die Größe der Centripetalkraft vor, welche den Körper in seiner Kreisbahn erhält, und construirt man ferner EG senkrecht zu AB und EF senkrecht zu CD, das Rechteck EFMG, so sind EG und EF die senkrecht zu den festen Durchmessern gerichteten Componenten jener Kraft. Bezeichnet man die Länge von EG und EF bezüglich mit x und y, so wie die Centripetalkraft mit f, so werden jene Componenten ausgedrückt durch $f\frac{x}{a}$ und $f\frac{y}{a}$, sie sind also proportional der Entfernung des Punktes E von den Durchmessern. Denkt man sich nun diese Durchmesser gleichsam als den Sitz zweier Kräfte, deren Richtung stets senkrecht zu denselben, und deren Größe proportional der Entfernung von denselben, und zwar in der Einheit der Entfernung gleich $\frac{f}{a}$ ist, so würde der in der Kreisperipherie sich bewegende Körper vermöge dieser Kräfte in derselben genau so verharren, als ob die Centripetalkraft auf ihn einwirkte. Bewegt sich nun der Körper von A nach E, und besitzt er in A die tangentiale Geschwindigkeit c, so wird er dieselbe bei Substitution jener Kräfte anstatt der Centripetalkraft auf seiner Bahn überall beibehalten. Nach den zu Anfang ausgesprochenen Principien lassen sich nun aber auch die Wege leicht bestimmen, welche der Körper vermöge jeder der beiden obigen Kräfte besonders durchlaufen muß. Denken wir uns nämlich die durch A zu CD gezogene Parallele AP mit materiellen Punkten von der Masse eins besetzt, so werden dieselben vermöge der von CD ausgehenden Kraft $\frac{fy}{a}$ jeden Augenblick gleich lange parallele Wege beschreiben, sie werden fortwährend gleich weit von CD sein und also stets in einer

Parallelen zu CD bleiben müſſen. Hat nun ein Punkt A in derſelben eine beſtimmte Geſchwindigkeit für ſich erhalten, deren Richtung mit ihr zuſammenfällt, ſo wird er in der Linie des ſich bewegenden Punktſyſtems bleiben und nur ſeine relative Lage zu den einzelnen Punkten deſſelben ändern. Es wird dies auch noch geſchehen, wenn auf denſelben eine Kraft wirkt, welche fortwährend in der Richtung der Linie alſo fortwährend ſenkrecht zu AB bleibt. Das iſt aber genau hier der Fall. Wenn alſo A vermöge der beiden Kräfte auf der Kreisbahn von A bis E gekommen iſt, ſo muß auch einer der Punkte, womit die Linie AP beſetzt iſt, und auf welche nur die von CD ausgehende Kraft wirkt, ſich in E befinden, und es müſſen ſomit alle Punkte der Linie AP ſich in der durch E zu AP gezogenen Parallele EG befinden, und der mit A zu Anfang coincidirende Punkt des Syſtems hat der Weg AG vermöge der Kraft $f\frac{y}{a}$ durchlaufen. Es mißt aber ferner EG auch den Weg, um welchen ſich A von jenem Punkte vermöge der Kraft $f\frac{x}{a}$ entfernt hat, folglich auch die Länge des Weges, welchen A vermöge dieſer Kraft allein längs AP durchlaufen würde. Macht man auf AP das Stück $AM = EG$ und ſchreibt man $x$ für EG und $\alpha$ für Winkel EMA, ſo wird $x = a\sin\alpha$. Da der Bogen AE gleich $ct$ iſt, ſo kann man für $\alpha$ ſchreiben $\frac{ct}{a}$. Bezeichnet ferner $k$ die Größe der Kraft in der Einheit der Entfernung, iſt alſo $k = \frac{f}{a}$, ſo wird, da $f = \frac{c^2}{a}$ iſt, $c = a\sqrt{k}$. Setzt man dieſe Werthe in $x = a\sin\alpha$ ein, ſo geht die Gleichung über in:

$$4)\quad x = a\sin t\sqrt{k}.$$

Zerlegt man ferner die tangentiale Geſchwindigkeit $c$ im Punkte E nach den beiden zu AB und CD ſenkrechten Richtungen, ſo gibt die auf AB ſenkrechte Componente die Geſchwindigkeit, welche der längs AP ſich bewegende Körper im Punkte H vermöge der Kraft $f\frac{x}{a}$ oder $kx$ erlangt. Bedeutet $v$ dieſe Geſchwindigkeit, ſo ergibt ſich

$$5)\quad v = a\sqrt{k}\,\cos t\sqrt{k},$$

und aus (4) und (5): $v^2 = k(a^2 - x^2)$.

**5)** Um nun aus Gleichung 4 und 5 die Natur der Bewegung herzuleiten, ſei AB die gerade Linie, längs welcher ſich der Körper von der Maſſe eins vermöge einer Kraft bewegt, welche proportional der Entfernung vom Punkte M in derſelben iſt, und deſſen Bewegung durch 4 und 5 ausgedrückt wird. Es ſei $MA = MB = a$, (Fig. 3)

x ist alsdann die Entfernung des Körpers von M zur Zeit t. Setzt man nun in 4 für t Null ein, so wird x=o; für wachsende Werth von t wächst auch der Werth von x. Wenn $t\sqrt{k}=\frac{\pi}{2}$, oder $t=\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ wird, so erreicht x seinen größten positiven Werth a. Der Körper wird also in dem Punkte B anlangen. Wächst t über diesen Werth hinaus, so nimmt x wieder ab, der Körper tritt also eine Rückwärtsbewegung an, und gelangt nach der Zeit $t=\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, wo x = o ist, wieder in M an. Von nun ab wird x negativ, weil der Winkel $t\sqrt{k}$ den Werth $\pi$ überschreitet, der Körper setzt seine Bewegung somit über M hinaus fort. Er erreicht sein negatives Maximum in A nach der Zeit $\frac{3\pi}{2\sqrt{k}}$, und gelangt schließlich wieder in M an, wenn $t=\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ wird, um dieselbe Bewegung in derselben Weise zu wiederholen. Der Körper führt also Schwingungen aus, deren Weite gleich a, und deren Dauer $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ ist. Letztere ist demnach unabhängig von der Schwingungsweite und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Größe der Kraft in der Einheit der Entfernung.

**6)** Die Aehnlichkeit der Bewegung mit den Pendelschwingungen fällt sofort auf. Wirklich ist auch die Kraft, mit welcher das aus der Gleichgewichtslage herausgebrachte Pendel in dieselbe zurückzukehren sucht, gleich $g\frac{x}{l}$, worin x das von dem Endpunkte des Pendels auf die durch den Aufhängungspunkt gehende Verticale gefällte Perpendikel und l die Länge des Pendels vorstellt. Es beschreibt bei seiner Bewegung einen Bogen, den man indessen für sehr kleine Elongationen als gerade Linie ansehen kann. Für diesen Fall lassen sich also die Gleichungen 4 und 5 in Anwendung bringen. Es wird, da k die Größe der Kraft in der Einheit der Entfernung in den Formeln bedeutet, nur nöthig sein für k einzusetzen $\frac{g}{l}$, weil dieser Quotient die Größe der Kraft ausdrückt, welche das Pendel in der Einheit der Entfernung in die Ruhelage zurückzuführen strebt. Bezeichnet also T die halbe Dauer einer Pendelschwingung, so erhält man:

$$6)\quad T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dieselbe ist also der Quadratwurzel der Länge direkt und derjenigen der Schwerkraft umgekehrt proportional.

**7)** Der Behandlung des physischen Pendels schicken wir noch eine Aufgabe in Bezug auf die Drehung der Körper um eine feste Axe voraus. Die Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$, ꝛc. seien unter sich und mit der Drehungsaxe A in starrer Verbindung, sie liegen in den Entfernungen $r_1$, $r_2$, $r_3$, ꝛc. beliebig um dieselbe vertheilt. Auf das System sollen nun die Kräfte $f_1$, $f_2$, $f_3$ ꝛc. wirken, von denen wir der Einfachheit wegen annehmen, daß sie in Ebenen senkrecht zu der Drehungsaxe gelegen sind. Die Perpendikel von den Durchschnittspunkten derselben mit diesen Ebenen auf die Richtungen der Kräfte bezeichnen wir mit $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$. Es fragt sich, welche Winkelgeschwindigkeit das System nach der Einheit der Zeit erhalten wird, d. h. wie groß die Geschwindigkeit eines in der Einheit der Entfernung von der Axe entlegenen Punktes sein würde, wenn die Kräfte ungeändert fortwirkten. Bezeichnen wir diese unbekannte Geschwindigkeit mit $\omega$, so würde dieses $\omega$ zugleich das Maaß der Kraft sein, welche in der Einheit der Entfernung angebracht werden müßte, um der Masse eins die Geschwindigkeit $\omega$ mitzutheilen. Denken wir uns nun Kräfte an jeder der Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$ ꝛc. angebracht, welche an jeder derselben für sich die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ erzeugte, so müßte die an $m_1$ wirksam gedachte Kraft die Geschwindigkeit $\omega r_1$ hervorbringen, ihre Größe müßte also, da die Masse $m_1$ bewegt werden soll, gleich $\omega r_1 m_1$ sein. Ebenso würden die an $m_2$, $m_3$ ꝛc. anzubringenden Kräfte gleich $\omega r_2 m_2$, $\omega r_3 m_3$ sein müssen. Diese Kräfte werden nun offenbar an dem ganzen Systeme ebenfalls die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ hervorbringen, da sie dieselbe an den selbständig und unverbunden gedachten Massen erzeugen, durch die Verbindung derselben unter sich und mit A also keinerlei Störung in Bewegung der einen durch die der andern statt finden kann. Die Leistung dieser gedachten Kräfte in Bezug auf Drehung ist folglich genau gleich derjenigen der wirklich wirksamen. Daraus folgt, daß die Drehungsmomente der beiden Kräftesysteme gleich sein müssen, dasselbe ist für die an $m_1$ angebrachte Kraft gleich $\omega r_1 m_1 r_1$ oder $\omega r_1^2 m_1$ ꝛc., für die Kraft f, gleich $f_1 \varrho_1$. Daraus ergibt sich also:

$$\omega\,(r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + r_3^2 m_3 + \ldots) = f_1\varrho_1 + f_2\varrho_2 + \ldots\,,$$

eine Gleichung, welche wir kurz schreiben wollen:

$$7)\quad \omega \Sigma r^2 m = \Sigma f \varrho.$$

Bezeichnet nun M eine Masse gleich $\Sigma r^2 m$, welche man in der Einheit der Entfernung anbrächte, so müßte die Kraft, welche dieser

Masse die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ mittheilte, gleich $\omega M$, und das Drehungsmoment ebenfalls gleich $\omega M$ sein. Bezeichnet nun F die Größe dieser in der Einheit der Entfernung anzubringenden Kraft, so wird $\omega M = F$. Versetzt man also die Masse $\Sigma r^2 m$, und die Kraft $\Sigma f\varrho$ in die Einheit der Entfernung von der Axe, so wird dieselbe Winkelgeschwindigkeit erzeugt, als ob die Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$ ꝛc. in den Entfernungen $r_1$, $r_2$, $r_3$, und die Kräfte $f_1$, $f_2$, $f_3$ in den Entfernungen $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ angebracht würden. Es folgt ferner hieraus, daß der Quotient $\frac{\Sigma f\varrho}{\Sigma r^2 m}$ diejenige Kraft bedeutet, welche auf die in die Entfernung eins gebrachte Masse eins einwirken muß, um die gleiche Winkelgeschwindigkeit $\omega$ zu erzeugen.

**8)** Die Anwendungen der Auseinandersetzungen der vorigen Nummer auf das physische Pendel ist leicht, und es läßt sich die Länge eines einfachen Pendels bestimmen, welches mit demselben Schwingungen von gleicher Zeitdauer ausführt. Wir wollen wiederum annehmen, $m_1$, $m_2$, $m_3$ seien Massen in starrer Verbindung mit einander und mit der Axe, deren Entfernung von der Axe gleich $r_1$, $r_2$, $r_3$ sei, und die auf dieselbe wirkende Kraft sei die Schwerkraft. Man drehe das Ganze aus der Gleichgewichtslage und nenne den Winkel, welcher das vom Schwerpunkte auf die Axe gefällte Perpendikel mit den Verticalen bildet $\alpha$. Da nun die Schwerkraft die einzelnen Massen angreift, so ist die Größe der $m_1$, $m_2$, $m_3$ angreifender Kräfte gleich $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$... Das Moment dieser unter einander parallelen Kräfte in Beziehung auf die Drehungsaxe ist aber gleich dem Momente ihres Resultirenden. Bezeichnet deßhalb M die Summe sämmtlicher Massen, so ist die Größe der Resultirenden Mg. Sie geht außerdem durch den Schwerpunkt. Ist also $\varrho$ die Entfernung des Schwerpunktes von der durch die Axe gelegten Verticalebene, so ist das Moment der thätigen Kräfte $M\varrho g$. Bedeutet dann wie früher $\omega$ die durch dieselben hervorgebrachte Winkelgeschwindigkeit, so erhält man zur Bestimmung derselben:

$$8)\quad \omega \Sigma r^2 m = M\varrho g$$

oder, indem man mit r die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsaxe bezeichnet, $\omega \Sigma r^2 m = Mrg \sin\alpha$. Wenn man also in die Einheit der Entfernung die Masse $\frac{\Sigma r^2 m}{Mr}$ versetzt und auf dieselbe ebenfalls in der Einheit der Entfernung die Kraft $g \sin\alpha$ wirken läßt, so wird dieselbe Winkelgeschwindigkeit $\omega$ erzeugt.

Nun sei l die Länge eines einfachen Pendels, an dessen Ende die

schwere Masse m sich befindet, und dem die Schwerkraft bei einer Elongation $\alpha$ dieselbe Winkelgeschwindigkeit $\omega$ mittheilt, so muß $\omega l^2 m = mgl\sin\alpha$ oder $\omega l = g\sin\alpha$ sein. Die letzte Gleichung besagt auch, daß die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ zu Stande kömmt, wenn man die Masse 1 und die Kraft $g\sin\alpha$ in der Entfernung eins anbringt. Da nun die zur Anwendung kommende Kraft und die erzeugte Geschwindigkeit dieselbe ist, wie bei dem physischen Pendel, so müssen auch die Massen, welche bewegt werden, dieselben sein. Es ergibt sich demnach als Werth für die Länge l des einfachen Pendels von der geforderten Beschaffenheit:

$$9)\quad l = \frac{\Sigma r^2 m}{Mr}.$$

Die gefundene Länge ist also unabhängig von der Größe des Winkels $\alpha$. Denkt man sich also ein einfaches Pendel von dieser Länge, welches mit dem gegebenen gleichzeitig bei einer Elongation $\alpha$ seine Schwingungen beginnt, welches coincidirt mit der Verbindungslinie des Drehungs- und Schwerpunktes des gegebenen Pendels, mit welchem es den Aufhängungspunkt gemein hat, so muß dasselbe zu jeder Zeit mit dieser Linie coincidiren und folglich gleiche Schwingungsdauer mit ihm haben. Denn für die unendlich kleine Zeit $\tau$ bleiben offenbar die angreifenden Kräfte constant, jedes Pendel wird also den Bogen $\frac{1}{2}\omega\tau^2$ beschreiben und die Geschwindigkeit $\omega\tau$ erlangen. In der Lage, welche die beiden Pendel nach dieser Zeit erreichen, ändern sich die Kräfte, weil Winkel $\alpha$ etwa den Werth $\alpha_1$ annimmt. Die Rechnung zeigt aber leicht, daß dieselben an beiden Pendeln wiederum dieselbe Winkelgeschwindigkeit erzeugen würden. Bezeichnen wir dieselbe mit $\omega_2$, so würden beide in dem nächstfolgenden Momente $\tau$ vermöge der bereits erlangten Geschwindigkeit $\omega\tau$ den Weg $\omega\tau^2$ und vermöge der veränderten Kräfte den Weg $\frac{1}{2}\omega_1\tau^2$ beschreiben und dabei die Geschwindigkeit $\omega\tau + \omega_1\tau$ erlangen ꝛc. Die Pendel bleiben also zu jeder Zeit zusammen, es ist also auch ihre Schwingungsdauer dieselbe.

**9)** Wird nun ein Körper von bestimmter Gestalt z. B. ein parallelepipedischer Stab, Cylinder ꝛc. in Pendelschwingung versetzt, so hat man jedes kleinste Theilchen als einen Angriffspunkt der Schwerkraft anzusehen. In der Gleichung würde also der Ausdruck $\Sigma r^2 m$ eine Summe aus unendlich vielen Gliedern enthalten; das m jedes Gliedes würde die Masse eines solchen kleinsten Theilchens und r seine Entfernung von der Axe bedeuten. Die rechte Seite der Gleichung wird sich meistens leicht berechnen lassen, es würde darin M die Masse des Körpers, r die Entfernung seines Schwerpunktes von der Dre-

hungsaxe sein. Den Ausdruck $\Sigma r^2 m$ nennt man das Trägheitsmoment des Körpers. Die zur Bestimmung von I nothwendige Berechnung desselben läßt sich in einer für den Elementarunterricht hinreichenden Anzahl von Fällen mit Hülfe des folgenden der Integralrechnung entlehnten Satzes bewerkstelligen. Besteht eine Reihe aus unendlich vielen Gliedern ein jedes von der Form $x^{m-1}\xi$, deren erstes Glied $a^{m-1}\xi$, deren letztes $b^{m-1}\xi$ ist, und worin m eine ganze positive Zahl, $\xi$ eine unendlich kleine constante Größe bedeuten, und ist das x jedes folgenden Gliedes um $\xi$ größer als das x des vorhergehenden, so ist die Summe der Reihe gleich $\frac{b^m - a^m}{m}$. Den Beweis dieses Satzes führen wir folgendermaßen. Die in Rede stehende Reihe sei:

$$a^{m-1}\xi + x_2^{m-1}\xi + x_3^{m-1}\xi \ldots\ldots + x_n^{m-1}\xi + b^{m-1}\xi = S.$$

Nach der Annahme ist darin $x_2 - a = \xi$, $x_3 - x_2 = \xi$ ꝛc., es ist deßhalb:

$$x_2^m - a^m = (x_2^{m-1} + x_2^{m-2}a + x_2^{m-3}a^2 \ldots + a^{m-1})\xi$$
$$x_3^m - x_2^m = (x_3^{m-1} + x_3^{m-2}x_2 + x_3^{m-3}x_2^2 \ldots + x_2^{m-1})\xi$$
$$\vdots$$
$$b^m - x_n^m = (b^{m-1} + b^{m-2}x_n + b^{m-3}x_n^2 \ldots + x_n^{m-1})\xi.$$

Setzt man nun in die ersten dieser Gleichungen auf der rechten Seite a für $x_2$, und die zweite $x_2$ für $x_3$ ꝛc. in die letzte $x_1$ für b, so ist:

$$x_2^m - a^m < m x_2^{m-1}\xi$$
$$x_3^m - x_2^m < m x_3^{m-1}\xi$$
$$\vdots$$
$$b^m - x_n^m < m b^{m-1}\xi$$

folglich, wenn man links und rechts von den Ungleichheitszeichen addirt,

$$b^m - a^m < mS - m a^{m-1}\xi.$$

Setzt man umgekehrt in die erste der obigen Gleichungen rechts a für $x_2$, in die zweite $x_2$ für $x_3$, in die letzte $x_n$ für b, so erhält man schließlich auf ähnliche Weise:

$$b^m - a^m > mS - m b^{m-1}\xi.$$

Der Werth für mS muß also zwischen $b^m - a^m + ma^{m-1}\xi$ und $b^m - a^m + mb^{m-1}\xi$ liegen. Nun bedeuten a, b und m bestimmte Zahlen von endlicher Größe, während man $\xi$ so klein denken kann, als man

will, die Ausdrücke $ma^{m-1}\xi$ und $mb^{m-1}\xi$ sind deßhalb so wenig von Null verschieden, als man will. Die beiden Gränzen für mS fallen also zusammen in den Werth $b^m - a^m$. Damit wäre also bewiesen, daß

$$10)\quad S = \frac{b^m - a^m}{m}$$

ist.

Außerdem wird die Auffindung des Trägheitsmomentes oft dadurch erleichtert, daß man dasselbe zuerst für eine durch den Schwerpunkt gehende und parallel zur Drehungsaxe gelegte Axe berechnet. Es bedeute nämlich a die Entfernung dieser beiden Axen, $\varrho$ das Perpendikel von der Masse m auf die durch den Schwerpunkt gehenden Axe, r das Perpendikel von m auf die Drehungsaxe, dann ist die Verbindungslinie ihrer Fußpunkte gleich a. Bezeichnet man mit $\alpha$ den von letzterer in $\varrho$ eingeschlossenen Winkel, so ist $r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\alpha$, also auch $r^2m = a^2m + \varrho^2m - 2am\varrho\cos\alpha$. Legt man nun durch die Axe, welche durch den Schwerpunkt geht, eine Ebene senkrecht zu der Ebene der beiden Axen, und bezeichnet das von m auf dieselbe gefällte Perpendikel mit x, so ist $\varrho\cos\alpha = x$. Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers $\Sigma r^2m$ läßt sich also ausdrücken durch $a^2\Sigma m + \Sigma\varrho^2m - 2a\Sigma mx$.

Ist nun M die Masse des ganzen Körpers und p das vom Schwerpunkte auf dieselbe Ebene gefällte Perpendikel, so ist nach einem als bekannt vorauszusetzenden Satze der Theorie vom Schwerpunkte $\Sigma mx = Mp$. Da nun für den vorliegenden Fall die Ebene durch den Schwerpunkt selbst gelegt ist, so wird $p = o$, und es reducirt sich der Werth für $\Sigma r^2m$ auf $a^2\Sigma m + \Sigma\varrho^2m$ oder $a^2M + \Sigma\varrho^2m$. Darnach ist das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine beliebige Axe gleich dem Trägheitsmoment der nach dem Schwerpunkte versetzten Masse plus dem Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe.

**10)** Wir wollen annehmen das Pendel sei ein cylindrischer Stab, dünn genug, um die in demselben zu seiner Axe senkrechten Querschnitte gelegenen Massentheilchen als gleich weit vom Aufhängungspunkte abstehend ansehen zu können. Wir theilen denselben der Länge nach in unendlich viele gleich dicke Scheiben durch Querschnitte senkrecht zu seiner Axe. Die Massentheilchen derselben Scheibe haben alsdann gleichen Abstand l von der Drehungsaxe. Die Dicke derselben sei $\lambda$, die Masse der Längeneinheit m, dann ist die in jeder Scheibe enthaltene Masse $\lambda m$, und das Trägheitsmoment derselben $l^2\lambda m$. Bezeichnet also a die Entfernung des Drehungspunktes vom Endpunkte und b die Entfernung

vom Anfangspunkte, so besteht das Trägheitsmoment $\Sigma r^2 m$ aus einer Reihe von unendlich vielen Gliedern von der Form $l^2 \lambda m$, in welcher jedes l des folgenden um $\lambda$ größer ist, als das l im vorhergehenden, während $\lambda$ constant bleibt, deren erstes Glied $b^2 \lambda m$, deren letztes $a^2 \lambda m$ ist, die Reihe hat deßhalb den Werth $\frac{1}{3}(a^3 - b^3)m$, oder, da $(a-b)m$ die Masse M der ganzen Stange verstellt. $\frac{1}{3}M(a^2 + ab + b^2)$.

Um das Trägheitsmoment einer Scheibe, deren Radius gleich a ist in Beziehung auf eine zu ihrer Ebene senkrechte Drehungsaxe zu bestimmen, ziehe man zunächst durch ihren Schwerpunkt, d. i. also durch ihren Mittelpunkt, eine Parallele zur Drehungsaxe und berechene das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe. Die in der Flächeneinheit enthaltene Masse sei m. Theilen wir nun die ganze Scheibe in concentrische Ringe von der unendlich kleinen Breite $\varrho$, so haben sämmtliche Massentheilchen desselben Ringes dieselbe Entfernung von dem Mittelpunkte, es kömmt ihnen also dasselbe $r^2$ in der Summenformel für das Trägheitsmoment zu Diejenigen Summanden in derselben, welche auf diese Massenelemente sich beziehen, lassen sich also schreiben $r^2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \ldots)$, wenn man mit $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ &c. diese Elemente bezeichnet, wie sie, von einem beliebigen derselben beginnend, auf einander folgen. Die Klammer stellt demnach die gesammte in dem Ringe enthaltene Masse dar. Die Fläche desselben ist aber, wegen seiner geringen Breite gleich $2r\pi\varrho$, die darin enthaltene Masse also $2r\pi\varrho m$. Es läßt sich folglich der Ausdruck $\Sigma r^2 m$ zerlegen in Summanden von der Form $r^2 2r\pi\varrho m$ oder $2r^3\varrho\pi m$, so daß das Trägheitsmoment $\frac{1}{2}h^4\pi m$ wird, wenn man den Halbmesser der Scheibe mit h bezeichnet. Bedeutet P die Masse der Scheibe, so ist $P = h^2\pi m$, folglich das Trägheitsmoment derselben in Bezug auf ihren Schwerpunkt $\frac{1}{2}h^2P$, und in Bezug auf die Drehungsaxe $\frac{1}{2}h^2P + e^2P$, worin e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsaxe ist. Bestände also das Pendel, aus einer solchen Scheibe, welche man mittels eines Drahtes an der Drehungsaxe befestigt hätte, so würde das Trägheitsmoment desselben $\frac{1}{3}Ma^2 + \frac{1}{2}h^2P + e^2P$ sein. Um die Länge des einfachen Pendels zu berechnen, welches gleichdauernde Schwingungen machte, würde noch der in Gleichung 9 vorkommende Ausdruck Mr zu bestimmen sein. Darin bedeutet aber M die Gesammtmasse des schwingenden Körpers und r den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe. Für unsern Fall erhält man $(M+P)r = \frac{1}{2}aM + eP$, wornach man berechnet:

$$l = \frac{\frac{1}{3}Ma^2 + \frac{1}{2}h^2P + e^2P}{\frac{1}{2}aM + eP}.$$

Experimental läßt sich das Trägheitsmoment eines Körpers oft ohne Schwierigkeit bestimmen. Ist derselbe z. B. ein parallelepipedischer Stab, so würde es hinreichen denselben in schwingende Bewegung zu versetzen und die Schwingungszeit zu beobachten. Ist dieselbe gleich t, so würde $t=\pi\sqrt{\frac{\Sigma r^2 m}{gM\varrho}}$ sein, in welcher Gleichung $M\varrho$ leicht gefunden wird, so daß sich alsdann $\Sigma r^2 m$ berechnen läßt. Ist K das Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt, und e die Entfernung der Drehungsaxe von denselben, so ist $K+e^2M=\Sigma r^2 m$. Ebenso würde man mittels der Torsionswage K erhalten. Hängt man den Stab im Schwerpunkte auf und läßt ihn schwingen, so kann man die Gleichung anwenden $t=\pi\sqrt{\frac{K}{F}}$, worin F die Torsionskraft bedeutet. Setzt man letzte als unbekannt voraus, und befestigt man zwei gleiche Gewichte in gleichen Entfernungen vom Drehungspunkte, deren Trägheitsmoment P bekannt ist, so würde sich eine andere Schwingungsdauer $t_1$ herausstellen, und es müßte $t_1=\pi\sqrt{\frac{K+P}{F}}$ sein. Da die beiden Gleichungen nur die Unbekannten F und K enthalten, so würden beide sich bestimmen lassen.

**11)** Bei der Aufgabe über die Pendelschwingungen haben wir die Schwingungsdauer aus der Größe der bewegenden Kraft berechnet. Das Umgekehrte findet bei folgender Aufgabe Statt. Bekanntlich ist die Torsionskraft eines Drahtes oder einer elastischen Saite proportional dem Drehungswinkel. Denkt man sich nun senkrecht zu ihrer Richtung am Ende derselben einen gewichtslosen Hebel angebracht, so betrachtet man als Maaß der Torsionskraft diejenige Kraft, welche in der Einheit der Entfernung angebracht werden muß, um der rückwirkenden Drehkraft das Gleichgewicht zu halten, nachdem der Hebel um den Winkel eins aus der Gleichgewichtslage heraus gedreht ist. Es befinde sich nun der Draht in verticaler Lage, und am Ende des Drahtes ein horizontal an demselben befestigter Stab. Man versetze letztern in Schwingungen und bezeichne mit t die beobachtete Schwingungsdauer. Haben nun die Schwingungen eines Pendels von der Länge eins, an dessen Ende die Masse eins durch eine Kraft in Bewegung gesetzt wird, deren Größe in der Einheit der Entfernung k ist, gleiche Dauer mit dem durch die Torsionskraft bewegten Stabe, so würde man aus der Gleichung $t=\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ erhalten $k=\frac{\pi^2}{t^2}$. Nun sei F die Größe der Kraft, welche am

Stabe in der Einheit der Entfernung von dem Drahte angebracht werden muß, um ihm dieselbe Winkelgeschwindigkeit mitzutheilen, nachdem derselbe um den Winkel eins aus seiner Gleichgewichtslage gedreht ist. Dann müßte diese Geschwindigkeit gleich k sein, und man würde nach Anleitung von Gleichung (7) erhalten $k\Sigma r^2m = F$ oder $F = \frac{\pi^2}{t^2}\Sigma r^2 m$.

Befände sich eine Scheibe vom Radius r und dem Gewichte P in horizontaler Lage am Ende des Drahtes, welcher durch ihren Mittelpunkt ginge, so erhielte man $F = \frac{\pi^2}{t^2}.\frac{1}{2}r^2P$. Wirkt nun die Schwerkraft auf die Masse m, so ist die Gesammtkraft, welche dieselbe angreift mg. Bestimmt man m also in der Art, daß F=mg ist, so würde m die Anzahl von Pfunden bedeuten, welche man als Maaß der Torsionskraft anzusehen hätte. Wenn man also den horizontalen Stab um den Winkel eins aus der Ruhelage herausdreht und in der Entfernung eins vom Drehungspunkte eine Schnur befestigte, welche man in horizontaler Richtung und senkrecht zu dem Stabe über eine Rolle leitete, so müßte man an dieselbe das Gewicht m anhängen, damit der Stab in seiner Lage verharrte.

In ähnlicher Weise würde man die Größe der magnetischen Richtkraft erhalten, welche eine Declinationsnadel in den magnetischen Meridian zurückführt, oder die Größe der abstoßenden oder anziehenden electrischen Kräfte mittels der Coulombschen Drehwage.

**12)** Die Anwendbarkeit der Formeln (7) erhellt nicht sofort, wenn man anstatt durch die continuirlich wirkende Kraft f, die Bewegung durch einen Stoß hervorgebracht wird, wenn also etwa die Masse M mit der Geschwindigkeit v in der Entfernung r auf die um eine Axe drehbaren Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$ stößt, und es sich um die nach dem Stoße zu Stande gekommene Drehungsgeschwindigkeit $\omega$ handelt. Der Fall läßt sich indessen auf den in Gleichung 7 behandelten zurückführen. Denken wir uns nämlich die träge Masse M sei allein mit der Drehungsaxe verbunden, und es wirke eine Kraft f auf dieselbe, welche ihr nach der Einheit der Zeit die Geschwindigkeit v mittheilte, so würde Mv das Maaß dieser Kraft sein. Dieselbe müßte nun offenbar an den Massen M, $m_1$, $m_2$, $m_3$ ꝛc. dieselbe Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in der Einheit der Zeit erzeugen, welche durch den Stoß hervorgebracht wird. Zu ihrer Bestimmung erhält man also die Gleichung $\omega(Mr^2 + m_1r_1^2 + \ldots) = fr = Mvr$. Oder man könnte die Sache auch folgendermaßen auffassen. Zur Hervorbringung der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ an den Massen

$m_1$, $m_2$, $m_3$ durch den Stoß ist immer eine gewisse kurze Zeit erforderlich, welche durch $\tau$ dargestellt werden mag. Der Widerstand, welchen die trägen Massen entgegensetzen, läßt sich als eine constante Kraft auffassen, welche der Bewegung von M entgegengesetzt wirkt; diese Kraft in gleicher Richtung mit der Geschwindigkeit v gedacht, müßte dann dieselbe Winkelgeschwindigkeit $\omega$ nach der Zeit $\tau$ an den Massen $m_1$ ꝛc. hervorbringen. Eine constante Kraft aber, welche die Zeit $\tau$ hindurch wirkend die Geschwindigkeit v der Masse $\mu$ bis auf $\omega r$ verminderte, ist gleich $= \frac{(v-\omega r)\mu}{\tau}$ (nach §. 2 am Schlusse), dieselbe gleichgerichtet, müßte also die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in der Zeit $\tau$, also $\frac{\omega}{\tau}$ in der Einheit der Zeit hervorbringen. Darnach geht die Gleichung 7 über in:

$$\frac{\omega}{\tau}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots) = \frac{(v-\omega r)Mr}{\tau},$$

welche genau mit der oben entwickelten übereinstimmt.

**13)** Schwingungen in elastischen Medien. Die schwingende Bewegung, worin die Lufttheilchen oder die Theilchen eines elastischen Stabes durch Gleichgewichtsstörungen gerathen, können ebenfalls durch die Formeln 4 und 5 dargestellt werden, da die Kraft, welche die Theilchen in die Ruhelage zurückzuführen sucht proportional der Ausschreitung derselben ist. Diese Bewegung pflanzt sich von dem Theilchen, wo sie beginnt mit constanter Geschwindigkeit auf die anstoßenden fort, welche der Reihe nach in ähnliche Bewegungen gerathen. Setzen wir voraus, daß die Theilchen desselben Querschnittes eines elastischen Stabes oder einer in einer cylindrischen Röhre eingeschlossenen Luftsäule ihre Schwingungen zu gleicher Zeit beginnen und dieselbe Schwingungsweite haben, so werden auch die Theilchen eines beliebigen andern Querschnittes gleichzeitige Schwingungen ausführen und ihre Schwingungsweite wird derjenigen des erstern Querschnittes gleich sein. Wenn man die hierauf Bezug habenden Erscheinungen untersuchen will, so genügt es also, die Untersuchung auf einen zur Axe parallelen Faden zu beschränken.

Wir wollen nun annehmen AB (Fig. 4) sei ein solcher Faden und das Theilchen A besitze eine Schwingung, dargestallt durch die Gleichung $x = a \sin t\sqrt{k}$, worin die einzelnen Buchstaben x, a, t, k die bekannte Bedeutung haben. Die Bewegung pflanzt sich längs AB fort und wird nach und nach sämmtlichen Theilchen des Fadens mitgetheilt. Bezeichnen v die für dasselbe Medium constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit, l die Länge

des Fadens und z den Abstand des zwischen A und B gelegenen Theilchens C von B, so beginnt C seine Bewegung $\frac{l-z}{v}$ Secunden später als A. Seine Bewegungsgleichung ist $x = a \sin t\sqrt{k}$, wenn man die Zeit von dem Anfange der Bewegung desselben an rechnet, rechnet man aber die Zeit von dem Momente an, in welchem A dieselbe beginnt, so muß man anstatt t, setzen $t-\frac{l-z}{v}$, und die betreffende Gleichung geht für C über in $x = a \sin\left(t-\frac{l-z}{v}\right)\sqrt{k}$. Ist die Entfernung des Theilchens C von A (d. i. also $l-z$) so groß, daß $\frac{l-z}{v}\sqrt{k} = 2\pi$ also $l-z = \frac{2v\pi}{\sqrt{\pi}}$ wird, so erhält man für C dieselbe Bewegungsgleichung wie für A. Dasselbe gilt für ein Theilchen D, dessen Entfernung von B gleich z, und dessen Entfernung $l-z$, von A gleich $\frac{4v\pi}{\sqrt{\pi}}$ ist, u. s. f. In Bezug auf die Bewegung der zwischenliegenden Theilchen wird es also einerlei sein, ob man A, C oder D als Ausgangspunkt nimmt, und alle Punkte zwischen A und C einerseits und C und D andererseits, deren Entfernung von A oder von C nach derselben Seite hin gleich groß ist, haben zu derselben Zeit gleich große und gleich gerichtete Ausschreitungen ausgeführt, sie sind in derselben Phase ihrer Bewegung. Die Länge AC soll durch den Buchstaben $\lambda$ ausgedrückt werden, so daß $\lambda = \frac{2v\pi}{\sqrt{k}}$ ist, dann befinden sich also stets zwei Theilchen, deren Entfernung gleich $\lambda$ ist, in derselben Phase ihrer Bewegung. Man nennt $\lambda$ nun die Länge einer Welle, und durch Einführung von $\lambda$ in die für C geltende Gleichung erhält man:

$$11)\quad x = a \sin\left(t\sqrt{k}-\frac{2\pi(l-z)}{\lambda}\right).$$

Wir wollen annehmen AB gehöre einem elastischen Stabe an, welcher in A frei und in B fest eingeklemmt ist. A werde in eine schwingende Bewegung, ausgedrückt durch die Gleichung $x = a \sin t\sqrt{k}$, versetzt, man erhielte dann für c die Gleichung $x_1 = a \sin\left(t\sqrt{k}-\frac{2\pi(l-z)}{\lambda}\right)$. Bei B

findet der von A ausgehende Impuls ein Hinderniß. Denken wir uns statt desſelben einen von der entgegengeſetzten Seite herkommenden Impuls, welcher jenem gleich aber entgegengeſetzt gerichtet iſt, ſo kann derſelbe das Hinderniß erſetzen. Es beginnt alſo in B eine Rückwärtsbewegung, welche den Theilen des Fadens von B ab dieſelbe ſchwingende Bewegung wie A mittheilt nur mit dem Unterſchiede, daß die Anfangsbewegung jedesmal entgegengeſetzt gerichtet iſt. Dieſer Impuls erreicht das Theilchen C nach der Zeit $\frac{1+z}{v}$, die dadurch hervorgerufenen Ausſchreitungen $x_2$ zur Zeit t würden berechnet aus:

$$12)\quad x_2 = -a\sin\left(t\sqrt{k} - \frac{2\pi(1+z)}{\lambda}\right).$$

Dieſe beiden Ausſchreitungen von A und B aus ſetzen ſich zuſammen, nennen wir deßhalb die Entfernung des Theilchen C von ſeiner Ruhelage x derart, daß $x = x_1 + x_2$ iſt, ſo muß

$$x = a\left[\sin\left(t\sqrt{k} - \frac{2\pi(1-z)}{\lambda}\right) - \sin\left(t\sqrt{k} + \frac{2\pi(1+z)}{\lambda}\right)\right].$$

$$13)\ \text{oder}\ x = 2a\sin\frac{2z\pi}{\lambda}\cos\left(t\sqrt{k} - \frac{2l\pi}{\lambda}\right)$$

ſein. Soll dieſer Zuſtand dauernd beſtehen für alle Theilchen C des Fadens AB, ſo dürfen die in B reflectirten Impulſe, die in A beſtehenden nicht ſtören, ſie müſſen alſo für jedes t mit letzteren zuſammenfallen. Für das Theilchen A iſt aber die Bewegungsgleichung vermöge des von B herrührenden Impulſes $x = -a\sin\left(t\sqrt{k} - \frac{4l\pi}{\lambda}\right)$. Soll alſo der vorhin ausgeſprochenen Bedingung genügt werden, ſo muß

$$-\sin\left(t\sqrt{k} - \frac{4l\pi}{\lambda}\right) = \sin t\sqrt{k},$$

alſo $\frac{4l\pi}{\lambda} = (2m+1)\pi$ und $l = (2m+1)\frac{\lambda}{4}$ ſein. Die Länge des Stabes muß ſomit eine ungerade Anzahl von viertel Wellenlängen betragen. Daſſelbe würde ſtattfinden für die Schwingungen der Luft in einer an einem Ende offenen Röhre, deren anderes Ende durch eine zur Axe derſelben ſenkrechte Wand geſchloſſen wird. Durch jene Annahme in Bezug auf l würde Gleichung 13 übergehen in

$$14)\quad x = \pm 2a\sin\frac{2z\pi}{\lambda}\sin t\sqrt{k}.$$

Da in derſelben $\sin t\sqrt{k}$ für $\cos\left(t\sqrt{k} - \frac{(2m+1)\pi}{2}\right)$ geſetzt wird,

welcher Werth sich auf $\sin t\sqrt{k}\cos\frac{2m+1}{2}\pi$ reducirt, so ist ersichtlich, daß die rechte Seite das positive Vorzeichen erhält, wenn $\cos\frac{2m+1}{2}\pi = +1$, das negative, wenn $\cos\frac{2m+1}{2}\pi = -1$ wird, ersteres ist der Fall, sobald $\frac{2m+1}{2}\pi$ die Form $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, das letztere, wenn dieser Ausdruck, die Form $(4n-1)\frac{\pi}{2}$ hat. Gleichung 14 ergibt nun sofort folgende Resultate:

1. Wenn $\frac{2z\pi}{\lambda} = m\pi$ wird, worin m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so erhält man $x=0$ für jedes t. Es ist dies der Fall für alle Punkte, deren Entfernung (z) von B gleich $m\frac{\lambda}{2}$, d. h. eine ganze Anzahl halber Wellenlängen beträgt. Die auf diese Weise bestimmten Punkte heißen Knotenpunkte.

2. Die Schwingungsweite $2a\sin\frac{2z\pi}{\lambda}$ erreicht ihr Maximum, wenn $\sin\frac{2z\pi}{\lambda} = \pm 1$ also $z=(2m+1)\frac{\lambda}{4}$ wird, d. i. also in denjenigen Punkten, deren Entfernung von B eine ungerade Anzahl von viertel Wellenlängen beträgt.

3. Alle Theilchen zwischen zwei aufeinander folgenden Knoten, welche also demselben Schwingungsbauche angehören, befinden sich bei ungleicher Schwingungsweite in derselben Phase ihrer Bewegung, weil $\sin\frac{2z\pi}{\lambda}$ für sie dasselbe Vorzeichen behält, die Theilchen aber in zwei anstoßenden Schwingungsbäuchen sind in entgegengesetzten Phasen begriffen, weil $\sin\frac{2z\pi}{\lambda}$ sein Vorzeichen ändert.

Untersuchen wir nun für den Fall, daß der Stab Längsschwingungen ausführt, oder für den Fall der in einer Röhre von vorhin bezeichneter Beschaffenheit schwingenden Luft, den Zustand der Verdichtung und Verdünnung. Nehmen wir zu dem Zwecke zu beiden Seiten von C zwei gleich weit entfernte Theilchen D und E an, und bezeichnen den Abstand DC oder EC mit u, so erhalten wir als Bewegungsgleichungen:

$$\text{für D, } x_1 = 2a \sin \frac{2(z-u)\pi}{\lambda} \cos\left(t\sqrt{k} - \frac{2l\pi}{\lambda}\right)$$

$$\text{für C, } x_2 = 2a \sin \frac{2z\pi}{\pi} \cos\left(t\sqrt{k} - \frac{2l\pi}{\pi}\right)$$

$$\text{für E, } x_3 = 2a \sin \frac{2(z+u)\pi}{x} \cos\left(t\sqrt{k} - \frac{2l\pi}{\lambda}\right)$$

Die Entfernung e der Theilchen D und E zur Zeit t beträgt also:

$$e = 2u + 2a\left(\sin\frac{2(z-u)\pi}{\lambda} - \sin\frac{2(z+\mu)\pi}{\lambda}\right) \cos\left(t\sqrt{k} - \frac{2l\pi}{\lambda}\right).$$

Es sollen zunächst die Bedingungen festgestellt werden, unter denen der zweite Summand gleich Null wird, in welchem Falle also die Theilchen D und E stets dieselbe Entfernung 2u von einander behalten. Man erhält zunächst die Gleichung:

$$\sin \frac{2(z-u)\pi}{\lambda} - \sin \frac{2(z+u)\pi}{\lambda} = 0$$

$$\text{oder: } \sin\frac{2u\pi}{\lambda} \cos \frac{2z\pi}{\lambda} = 0.$$

Es wird derselben also Genüge geleistet, wenn entweder $\sin\frac{2zu\pi}{\lambda} = 0$, oder $\cos \frac{2z\pi}{\lambda} = 0$ ist. Die erste Bedingung gibt $\frac{2u\pi}{\lambda} = m\pi$, worin m eine ganze Zahl bedeutet, folglich $2u = m\lambda$. Zwei beliebig liegende Theilchen also, deren Entfernung von einander eine beliebige Anzahl ganzer Wellenlängen beträgt, behalten stets dieselbe Entfernung von einander. Die zweite Bedingung gibt $z = (2m+1)\frac{\lambda}{4}$, wobei also die Strecke u eine ganz beliebige sein kann. Die durch diese Gleichung bestimmten Punkte liegen von B eine ungerade Anzahl von viertel Wellenlängen, es sind also zugleich diejenigen Stellen, in welchen die Theilchen die größte Schwingungsweite haben. Nimmt man die zunächst anliegenden Theilchen, so behalten dieselben also zu allen Zeiten gleiche Entfernung von einander, es findet demnach weder Verdichtung noch Verdünnung an den bezeichneten Stellen statt.

Die betreffenden Punkte befinden sich in der Mitte zwischen je zwei auf einander folgenden Knotenpunkten, und die zwischen ihnen gelegenen Theilchen bewegen sich in der einen Halbschwingung dem einen Knotenpunkte zu und von dem andern weg, in der andern in umgekehrter Richtung.

Das Maximum und Minimum für e wird erhalten, wenn — $\sin\frac{2u\pi}{\lambda}\cos\frac{2z\pi}{\lambda}\cos\left(t\sqrt{k}-\frac{2l\pi}{\lambda}\right)$ den größten positiven und negativen Werth annimmt. Das Vorzeichen dieses Ausdrucks für ein bestimmtes u und z hängt von dem letzten Faktor ab, welcher dasselbe periodisch nach bestimmten Zeitintervallen ändert, welche der Dauer einer Halbschwingung gleich sind. Maximum und Minimum wechseln also in denselben Punkten ab. Nehmen wir nun zuerst für z einen bestimmten Werth an, so fragt es sich, wie weit zu beiden Seiten von C die Punkte liegen, welche sich bei ihren Schwingen am meisten einander nähern und nach einer Halbschwingung sich wieder am weitesten von einander entfernen. Das ist nun offenbar der Fall, wenn $\frac{2\mu\pi}{\lambda} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, also $\mu=(2m+1)\frac{\lambda}{4}$, d. i. eine ungerade Anzahl von viertel Wellenlängen, die Entfernung der beiden Punkte also gleich einer ungeraden Anzahl von halben Wellenlängen ist. Zwei solcher Punkte nähern sich einander und entfernen sich von einander also mehr als irgend zwei andere gleich weit von C ab gelegene. Wenn nun aber für u ein bestimmter Werth angenommen wird, so erhält man das Maximum und Minimum, wenn $\cos\frac{2z\pi}{\lambda} = \pm 1$ oder $z = m\frac{\lambda}{2}$ ist, wo m wiederum eine ganze Zahl bedeutet. Die hierdurch bezeichneten Punkte sind die Knotenpunkte. Wenn man also die gewählte Strecke 2u so auf den Faden AB abträgt, daß deren Mitte in die Knotenpunkte fällt, so nähern und entfernen sich die an den Enden befindlichen Theilchen mehr als an irgend einer andern Stelle. Nimmt man die Strecke unendlich klein, so ergibt sich leicht, daß zunächst an den Knotenpunkten die Theilchen sich am meisten nähern und am weitesten auseinander gehen, so daß daselbst das Maximum der Verdichtung und Verdünnung statt haben muß.

Wir wollen zu den Schwingungen eines an beiden Enden freien Stabes übergehen. Es sei wiederum AB ein zur Axe paralleler Faden, welcher im Anfangspunkte A einen — transversalen oder longitudinalen — Impuls empfängt. Dieser gelangt nach bestimmter Zeit im Punkte C an. Die Bewegung desselben ist das Resultat der elastischen Kräfte, welche in Thätigkeit gesetzt werden, und welche als dem ursprünglichen Impulse entgegenwirkend zu denken sind. Letztere kommen dadurch in

Wirkung, daß C sich von den nach rückwärts oder vorwärts liegenden Theilchen entfernt oder sich denselben nähert. Die Bewegung des letzten Theilchens B wird aber nicht von weiter vorwärts liegenden behindert. Diese Bewegung wird deßhalb genau so stattfinden, als wenn wir uns den Stab über B hinaus verlängert dächten und nun dem nächstanliegenden Theilchen der Verlängerung einen Impuls mittheilten, welcher demjenigen gleich ist, den B erhält. Der weitere Verlauf muß also so beschaffen sein, als ob von B aus eine Welle ihren Ursprung nehme, welche der von A ausgehenden gleich ist. Durch Zusammensetzung der von A und B ausgehenden Impulse erhält man also für C die Gleichung:

$$x = a\left[\sin\left(t\sqrt{k} - \frac{2\pi(l-z)}{\lambda}\right) + \sin\left(t\sqrt{k} + \frac{2\pi(l+z)}{\lambda}\right)\right]$$

oder: $x = 2a\cos\frac{2z\pi}{\lambda}\sin\left(t\sqrt{k} - \frac{2l\pi}{\lambda}\right).$

Sollen die in A bestehenden Schwingungen nicht gestört werden, so muß der Bedingung:

$$l = m\frac{\lambda}{2}$$

Genüge geleistet werden. Die Länge der Röhre muß also einer ganzen Anzahl von halben Wellenlängen gleich sein. Die Knotenpunkte haben von B einen Abstand, welcher einer ungeraden Anzahl von viertel Wellenlängen gleich kömmt.

Die Entwickelungen gelten auch für eine Luftsäule, welche in einer an beiden Enden offenen Röhre eingeschlossen ist. In der Röhre selbst werden nämlich die seitlichen Bewegungen der Lufttheilchen durch den Widerstand der Wände aufgehoben, dieser Widerstand fällt plötzlich an der Oeffnung B weg, die Luft befindet sich daselbst genau unter den Verhältnissen wie bei A. Am Rande erhalten die Theilchen deßhalb gleichsam einen Impuls im Sinne der Bewegung, welcher sich nach allen Seiten hin gleichmäßig verbreitet und also in der Röhre eine neue Welle veranlaßt.

Schließlich wollen wir voraussetzen, der schwingende Stab sei an beiden Enden A und B fest, oder die Röhre, worin die Luft schwingt an beiden Enden durch eine feste Wand geschlossen. Es werde das Theilchen C in Bewegung gesetzt, dann geht sowohl von A als von B eine reflectirte Welle aus. Sollen letztere die Bewegungen des Theilchens C nicht stören, so muß sich AB gleichsam in zwei Stäbe AC und BC theilen, ein jeder mit einem festen Ende A und B und

einem freien C. Demnach muß die Länge sowohl von AC als BC einer ungeraden Anzahl von viertel Wellenlängen gleich sein. C selbst bildet die Mitte eines Schwingungsbauches, und die Länge des ganzen Stabes oder der Röhre muß gleich einer gewissen Anzahl von halben Wellenlängen sein.

**14)** Wenn ein Pendel anstatt aus seiner Ruhelage um den Winkel $\alpha$ gedreht zu werden, um sich selbst überlassen seine Schwingungen zu beginnen, durch einen Stoß in Bewegung gesetzt würde, so ließe sich letztere nach Anleitung von §. 12 leicht berechnen. Setzen wir der Einfachheit wegen ein mathem. Pendel von der Länge l voraus, an dessen Ende sich die Masse m befinde, der Stoß gehe von einer Masse M aus, deren Geschwindigkeit c sei, er sei ferner horizontal gerichtet und treffe das starre Pendel in der Entfernung r vom Aufhängungspunkte. Dann ergibt sich, für den Fall, daß m und M unelastisch sind, die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ nach dem Stoße aus der Gleichung $\omega(l^2m+r^2M)=cMr$. Berechnet man aus derselben den Werth von $l\omega$ und setzt denselben in Gleichung (5) gleich $a\sqrt{k}$ oder $a\sqrt{\frac{g}{l}}$, so ergibt sich der Werth der Schwingungsweite a, und werden somit auch die Constanten der Gleichung 4 und 5 bestimmt. Handelt es sich darum zu bestimmen, bis zu welcher Höhe das Pendel ansteigt, so ist nicht einmal die Voraussetzung sehr kleiner Elongationen nöthig. Es soll dieser Fall nicht besonders behandelt werden, dagegen wollen wir voraussetzen, das in Bewegung begriffene Pendel erhielte einen seitlichen Stoß in einem bestimmten Punkte seiner Bahn, und der Einfachheit wegen möge derselbe rechtwinklich zu dieser Bahn gerichtet sein. Denkt man sich alsdann wie in Fig. 2 zu §. 4 durch den Endpunkt des Pendels in seiner Ruhelage zwei auf einander senkrechte Gerade, deren eine mit der Bewegungsrichtung desselben zusammen fällt, und dann durch eine jede eine verticale Ebene, so wird es nach jeder dieser Ebenen, in welchem Punkte des Raumes es sich befinden mag, mit einer Kraft hingezogen, welche seiner Entfernung von der betreffenden Ebene proportional ist. Bezeichnet nämlich x und y diese Entfernung, so sind die anziehenden Kräfte $m\frac{gx}{l}$ und $m\frac{gy}{l}$. Sind die Elongationen sehr klein, so können wir die verticalen Ebenen wegdenken, weil die Bewegung alsdann nahezu in der Ebene der beiden Senkrechten erfolgt, x und y sind dann die Entfernungen des Pendels von denselben. Machen wir nun die Graden zu Coordinatenaxen; die Bewegung des Pendels erfolge längs der

X-Axe, und der Stoß in einem bestimmten Punkte A derselben, dessen Entfernung vom Anfangspunkte c sein möge. Es wird eine seitliche Ablenkung stattfinden, welche aber genau so beschaffen sein muß, daß 1) der mit ihm coincidirende Punkt auf der X-Axe, welcher die ursprüngliche Bewegung beibehält, mit dem Pendel zu allen Zeiten gleiche X haben muß (cf. §. 4) und daß 2) wenn man sich die Bewegung längs der X-Axe wegdenkt, die zu ihr senkrechte Seitenabweichung erfolgt, als wenn das Pendel von A aus nach dieser Richtung in Bewegung gesetzt würde.

Bezeichnet also b die Amplitüde der Schwingungen, welche das Pendel erlangen würde, wenn es den Stoß in seiner Ruhelage erhielte, und $t_1$ die Zeit, welche es braucht, um vermöge der ursprünglichen Bewegung bis zu A zu gelangen, so würde die seitliche Bewegung ausgedrückt durch die Gleichung $y = b \sin(t - t_1)\sqrt{k}$, worin k die bekannte Bedeutung hat. Sie drückt den Abstand des Pendels von der X-Axe aus, während $x = a \sin t\sqrt{k}$ dessen Abstand von der Y-Axe bezeichnet. Eliminirt man aus beiden Gleichungen die Zeit t, so erhält man

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy\cos t_1\sqrt{k} = a^2b^2\sin^2 t_1\sqrt{k}.$$

Die von dem Pendel beschriebene Curve ist also eine Ellipse, deren Axenlage von der Zeit $t_1$ abhängt. Ist $t_1\sqrt{k} = \frac{1}{2}\pi$, erfolgt also der Stoß nachdem das Pendel bereits die äußerste Lage seiner Bahn erreicht hat, so geht die Gleichung über in $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, so daß die Ellipsenaxen alsdann mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Für $a = c$ ist die Bahn in diesem Falle ein Kreis. Ist $t_1 = o$, so bedeutet die Gleichung eine gerade Linie. Wenn der Stoß unter irgend einem schiefen Winkel gegen die ursprüngliche Richtung der Bewegung des Pendels gerichtet ist, so führt die Annahme eines schiefwinklichen Coordinatensystems zu ähnlichen Gleichungen und Resultaten.

**15)** Aus dem Vorstehenden folgt, daß die Bahn eines Körpers, auf welchen eine der Entfernung proportionale Kraft einwirkt, im Allgemeinen eine Ellipse ist. Der Satz soll in dem Nächstfolgenden noch besonders bewiesen werden. Wir wollen dabei die Aufgabe so stellen, daß wir ähnlich wie im §. 3 annehmen, ein Körper von der Masse eins bewege sich in einer Ellipse vermöge einer im Mittelpunkte derselben befindlichen Centralkraft, es fragt sich alsdann, wie groß dieselbe sein muß. Nehmen wir an, die Gleichung der Ellipse sei $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, und der Körper sei auf der Peripherie derselben bis zum Punkte A (Fig. 5) gelangt, während M den Mittelpunkt der Curve bedeuten möge. AB sei

die Richtung der Tangente, AC die der Normalen. Es sei K die Größe der zu suchenden Centralkraft, welche also ihren Sitz in M hat. Legt man nun durch A einen Kreis, welcher die Ellipse in A berührt und außerdem noch durch einen möglichst nahe an A gelegenen Punkt derselben geht, so liegt zunächst der Mittelpunkt dieses Kreises in AC. Wenn nun r der Radius desselben ist, so muß die Normalkraft, welche den Körper von A bis zu dem nächstanliegenden Punkte bringt und ihn also auch in der elliptischen Bahn erhält nach §. 3 gleich $\frac{v^2}{r}$ sein. Nach der Schlußbemerkung desselben Paragraphen muß aber die Componente der Kraft K längs AC gleich dieser Normalkraft sein. Bedeutet also $\alpha$ den Winkel MAC, so muß $K\cos\alpha = \frac{v^2}{r}$ sein. Daraus ergibt sich $K = \frac{v^2}{r\cos\alpha}$. Die jetzt noch erübrigende Arbeit zur Lösung der Aufgabe besteht nun darin, die rechte Seite der Gleichung durch Constante und die veränderliche Länge des Radius vector AM, welcher mit $\varrho$ bezeichnet werden soll, auszudrücken. Zu dem Zwecke soll zuerst r durch die Coordinaten $\xi$ und $\eta$ des Punktes A ausgedrückt werden. Wir verlegen zunächst den Anfangspunkt der Coordinaten durch parallele Axenverschiebung nach $\xi\eta$. Die Coordinaten des Mittelpunktes des zu suchenden Kreises seien qp, die Gleichung desselben $y^2 - 2qy + a^2 - 2px = 0$. Eliminiren wir aus letzterer und der umgeformten Ellipsengleichung y, so erhalten wir die Gleichung des 4. Grades

$$(a^2-b^2)x^4 - 4(a^2-b^2)(b^2\xi + a^2p)x^3 + 4[(b^2\xi + a^2p)^2 - (a^2-b^2)(\eta+q)$$
$$a^2q + a^4(\eta+q)^2]x^2 + 8a^2(q(\eta+q)(b^2\xi + a^2p) - a^2p(\eta+q)^2)x = 0.$$

Der Kreis schneidet also die Ellipse in 4 Punkten. Der zu suchende Kreis soll aber die Ellipse tangiren und außerdem noch durch einen dicht anliegenden Punkt gehen. Daraus folgt, daß drei Wurzeln obiger Gleichung den Anfangspunkt liefern müssen, es muß also sowohl der Coefficient von x als von $x^2$ gleich Null sein. Hieraus berechnet man den Werth für q und p. Addirt man dazu beziehlich $\eta$ und $\xi$, so ergeben sich die Coordinaten des Mittelpunktes in dem ursprünglichen Systeme. Es ist:

$$q + \eta = \frac{(b^2-a^2)\eta^3}{b^4}$$

$$p + \xi = \frac{(a^2-b^2)\xi^3}{a^4}$$

$$\text{also: } r = \sqrt{p^2+q^2} = \frac{(b^4\xi^2 + a^4\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

oder wenn man die von den Brennpunkten nach A gezogenen Leitstrahlen mit $r_1$ und $r_2$ bezeichnet:

$$r=\frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Bedeutet ferner p die von M auf die Tangente gefällte Senkrechte, so ist $\cos\alpha=\frac{p}{\varrho}$, und wenn man mit h den in der Einheit der Zeit von dem Leitstrahle $\varrho$ durchlaufenen Weg bezeichnet, so muß nach dem Kepplerschen Gesetze $vp=2h$ sein. Dadurch ändert sich der für K gefundene Werth, und man erhält:

$$15)\quad K=\frac{4h^2\varrho}{p^3r}.$$

Nun ist p offenbar das arithmetische Mittel zwischen den von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Perpendikel. Bezeichnen $p_1$ und $p_2$ die letztern, so ist $p_1:p_2=r_1:r_2$, nun ist $p_1:p_2=p_1^2:p_1p_2=p_1^2:b^2=r_1:r_2$, daraus ergibt sich $p_1=b\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ und $p_2=b\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$, also $p=\frac{1}{2}b\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}+\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\right)$. Darnach wird der Ausdruck für die Kraft, nach einer leichten Reduction:

$$K=\frac{4h^2\varrho}{a^2b^2}.$$

Da in dem Ausdrucke für K sowohl a und b als h constante Größen sind, so ist die zu suchende Kraft proportional dem Radius vector $\varrho$. Es lassen sich nun hieraus die Gleichungen 4 und 5 ohne Schwierigkeit herleiten. Der hier eingeschlagene Weg würde zwar nicht am raschesten zum Ziele führen, indeß läßt sich Gleichung 15 noch mannigfach verwerthen, und aus dem Grunde ist sie hier entwickelt.

**16)** Legen wir durch die große Axe 2a der Ellipse eine Ebene, welche mit der Ebene derselben einen Winkel bildet, dessen Cosinus gleich $\frac{b}{a}$ ist, und über der großen Axe einen Kreis in dieser Ebene, dessen Radius gleich a ist, so würde die Ellipse die Projection des Kreises vorstellen. Denken wir uns ferner auf dem Kreise einen Punkt in einer solchen Bewegung begriffen, daß seine Projection auf die Ebene der Ellipse jedesmal den Punkt trifft, wo sich der die elliptische Bahn beschreibende Körper befindet, so werden letzterer und der Punkt zu gleicher Zeit ihre Bahnen vollenden. Da ferner der nach dem Körper vom Mittel-

punkte der Ellipse gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Sectoren beschreiben muß, weil die Kraft, welche ihn in der Bahn erhält, eine Centralkraft ist, so muß auch der nach dem gezogene Kreisradius in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreiben, seine Geschwindigkeit ist also eine constante Größe. Bezeichnen wir den in der Zeiteinheit beschriebenen Winkel mit c, so beschreibt der Punkt in der Zeit t den Winkel ct und den Raum $a^2ct$. Der von dem Körper in der Ellipse auf angegebene Weise beschriebene Sector ist also abct. Rechnen wir die Zeit nun von der Stelle ab, wo der Körper den einen Endpunkt der kleinen Axe erreicht, der Punkt also die größte Entfernung von der Ebene der Ellipse hat, dann erhält man als Coordinaten für die Lage des Körpers:

$$x = a \sin ct \text{ und } y = a \cos ct.$$

Die Geschwindigkeit v für einen bestimmten Punkt, dessen Abscisse x ist, berechnet man am einfachsten aus der Projection der Geschwindigkeit ac des Punktes in der Kreisperipherie auf die Ebene der Ellipse, da dieselbe gefunden wird aus dem Quotienten aus dem unendlich kleinen etwa in der Zeit $\tau$ beschriebenen Wege durch diese Zeit. Diese von dem Punkte und dem Körper beschriebenen unendlich kleinen Wege verhalten sich aber, wie die Längen der in den betreffenden Punkten gezogenen Ellipsen und Kreistangenten, gerechnet bis zum Durchschnitt der beiden Ebenen. Da die Geschwindigkeit auf dem Kreise gleich ac ist, so erhält man:

$$v^2 = \frac{c^2[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]}{a^2}.$$

$$\text{oder: } 16) \quad v^2 = c^2(a^2\cos^2 ct + b^2\sin^2 ct).$$

Es ergibt sich für den Fall, wo die Kreisebene senkrecht zur Ebene der Ellipse zu stehen kömmt, wo die Ellipse also in eine gerade Linie übergeht und $b = 0$ zu setzen ist:

$$v = ac \cos ct.$$

Man erkennt in den entwickelten Gleichungen sofort die Gleichungen 4 und 5 wieder. Auch die Größe der Kraft ließe sich aus dem Quotienten $\frac{v_1 - v}{\tau}$ (cf. §. 2 am Schlusse) leicht berechnen. Es ist nämlich:

$$v_1 = ac \cos c(t + \tau)$$
$$= ac(\cos ct \cos c\tau - \sin ct \sin c\tau),$$

oder wegen der Kleinheit der Zeit $\tau$:

$$v_1 = ac(\cos ct - c\tau \sin ct),$$

und demgemäß erhält man:

$$\frac{v_1 - v}{\tau} = -ac^2 \sin ct = -c^2 x.$$

Die Kraft ist also proportional der Entfernung x des in Bewegung begriffenen Körpers von seinem Ausgangspunkte. Es bedeutet aber $c^2$ die Größe der Kraft in der Einheit der Entfernung, welche in den Gleichungen 4 und 5 mit k bezeichnet wurden. Durch Behandlung der Gleichung 16 würden wir einen dem Ausdrucke für K in Gleichung 15 ähnlichen entwickeln können. Es ließe sich nämlich zunächst die Größe der Fliehkraft, und dann nach Anleitung der Schlußbemerkung §. 3, die nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtete Kraft berechnen. Einfacher gelangt man dazu durch Zerlegung derselben in zwei Kräfte, welche senkrecht zu den Axen gerichtet sind. Die durch dieselben erzeugten Geschwindigkeiten ergeben sich aus den correspondirenden Geschwindigkeiten des in der Kreisperipherie sich bewegenden Punktes. Da dieselben $ac \cos ct$ und $ac \sin ct$ sind, so erhält man für die Ellipse $ac \cos ct$ und $bc \sin ct$ als die zu der X- und Y-Axe parallelen Geschwindigkeiten. Der erstere entspricht die Kraft — $c^2x$ wie oben gezeigt worden ist, der zweiten die Kraft $c^2y$, wie eine ähnliche Rechnung ergibt, ihre Resultirende ist nach dem Mittelpunkte gerichtet, weil sie sich wie die Coordinaten des Punktes verhalten. Bezeichnet man diese Resultirende wiederum mit K, so ist $K = c^2\sqrt{x^2+y^2} = c^2\varrho$, worin $\varrho$ den Radius vector bedeutet. Ist nun, wie früher, h der in der Einheit der Zeit von letzterem durchlaufene Weg, so muß $h = \frac{1}{2}abc$, also $c = \frac{2h}{ab}$ sein. Dadurch ergibt sich für K der Werth: $K = \frac{4h^2\varrho}{a^2b^2}$, wie oben. Wenn sich ein Körper also in elliptischer Bahn bewegt vermöge einer Kraft, welche ihren Sitz im Mittelpunkte der Ellipse hat, so ist diese Kraft proportional der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte.